
Rilevatore di Muoni

Uso di uno scintillatore
accoppiato a PMT per la
rilevazione di Muoni Cosmici

Lodovico Lappetito

Sommario

Rilevatore a Scintillazione di Muoni Cosmici.....	3
Scintillatore Plastico	4
Fotomoltiplicatore.....	5
PMT accoppiato allo Scintillatore.....	6
PMT HV Driver	6
Teoria dei Raggi cosmici	7
I raggi cosmici primari	7
Caratteristiche dei raggi cosmici secondari.....	8
Decadimento del Muone.....	9
Misure di Flusso.....	11
Misura del Decadimento del Muone.....	14

Rilevatore a Scintillazione di Muoni Cosmici

Il rivelatore di muoni che si vuole utilizzare è basato su un **crystallo plastico scintillatore** accoppiato ad un **fotomoltiplicatore**. Cristallo plastico e PMT sono stati inseriti all'interno di un contenitore metallico cilindrico (bidoncino per colore). All'interno del contenitore è stato collocato anche il driver di alta tensione per alimentare il tubo fotomoltiplicatore. Il segnale dall'anodo del PMT viene prelevato mediante un condensatore di disaccoppiamento ed inviato ad un connettore BNC posto sul coperchio del contenitore. Sul coperchio è anche collocato il connettore per l'alimentazione a bassa tensione a 5V. Nelle immagini riportate sotto si vede il detector finito e con il coperchio aperto.



Il detector che è stato realizzato è sensibile anche alla radioattività gamma però è possibile selezionare facilmente gli impulsi prodotti dai muoni cosmici dato che questi ultimi hanno una ampiezza molto maggiore degli impulsi prodotti da radiazione gamma di background. Per ottimizzare la resa per i muoni è stato scelto lo scintillatore plastico **BC412** particolarmente adatto a rilevare particelle cariche come muoni o elettroni. L'area dello scintillatore, **119cm²** è stata scelta elevata in modo da ottenere un elevato numero di eventi al secondo riconducibili a muoni cosmici, inoltre lo spessore dello scintillatore è stato scelto considerevole, di **114mm**, in modo da aumentare lo **stopping power** e quindi aumentare la probabilità che i muoni vengano rallentati fino a fermarsi e quindi decadere all'interno dello scintillatore.

Scintillatore Plastico

Dati Tecnici

Tipo :	Bicron BC412
Base :	Polyviniltoluene
Density :	1.032 g/cc
Refractive Index :	1.58
Solubility :	Soluble in aromatic solvents, chlorine, acetone, etc. Insoluble in water, dilute acids, lower alcohols, silicone fluid, grease and alkalis.

Radiation Detected	Scintillator
< 100 keV X-rays	BC-404
100 keV to 5 MeV gamma rays	BC-408
>5 MeV gamma rays	BC-400 BC-416
Fast neutrons	BC-408 BC-412
Alphas, betas	BC-400 BC-404
Charged particles, cosmic rays, muons, protons, etc.	BC-408 BC-412 BC-416

Proprietà

Light Output, % Anthracene :	60
Rise Time, ns :	1.0
Decay Time, ns :	3.3
Pulse Width, FWHM, ns :	4.2
Light Attenuation Length, cm* :	210
Wavelength of Max. Emission, nm :	434
No. of H Atoms per cm³ , (x10²²) :	5.23
No. of C Atoms per cm³ , (x10²²) :	4.74
Ratio H:C Atoms :	1.104
No. of Electrons per cm³ , (x10²³) :	3.37
Principal uses/applications :	large area
Dimensions :	123mm diameter (119cm ²) / 114mm side



Fotomoltiplicatore

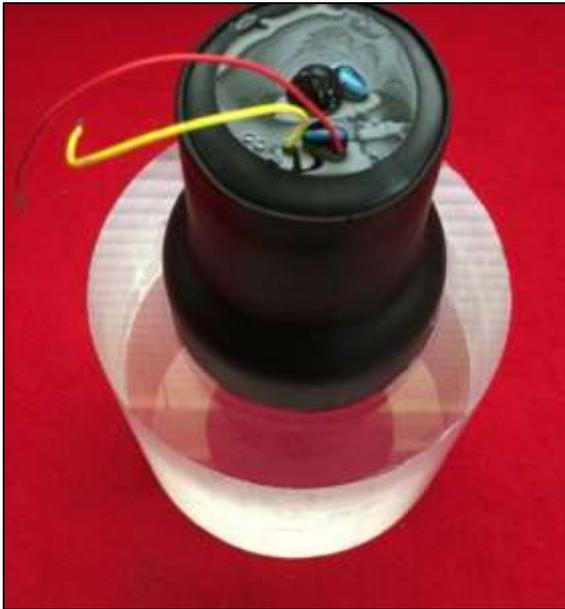


Tipo : Hamamatsu R6233

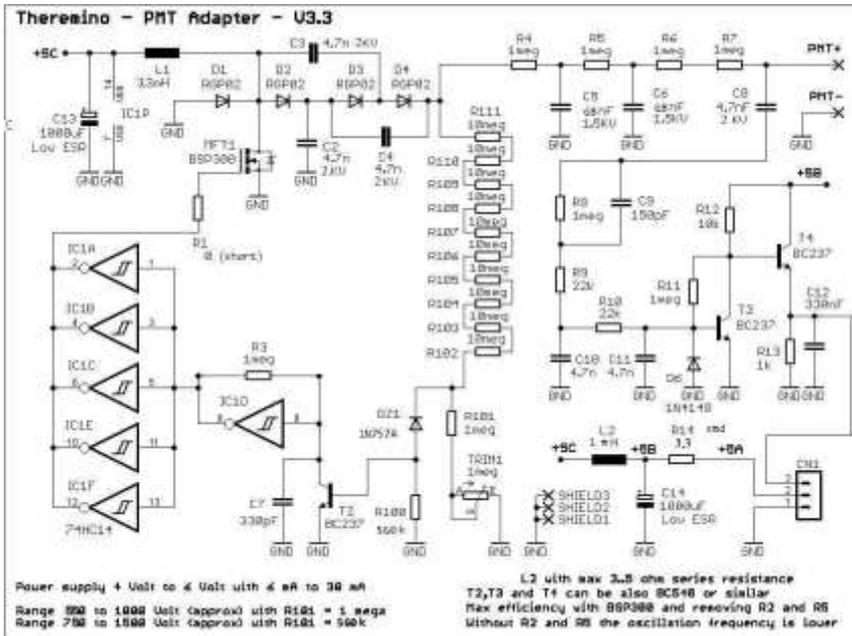
General : 76mm dia., Head-on type, Bialkali photocathode (Effective area : 70 mm dia./Spectral response : 300 to 650 nm)

Type	Head-on type
Tube Size	Dia.76 mm
Photocathode Area Shape	Round
Photocathode Area Size	Dia.70 mm
Wavelength (Short)	300 nm
Wavelength (Long)	650 nm
Wavelength (Peak)	420 nm
Spectral Response Curve Code	400K
Photocathode Material	Bialkali
Window Material	Borosilicate glass
Dynode Structure	Box-and-grid+Linear-focused
Dynode Stages	8
[Max. Rating] Anode to Cathode Voltage	1500 V
[Max. Rating] Average Anode Current	0.1 mA
Anode to Cathode Supply Voltage	1000 V
[Cathode] Luminous Sensitivity Min.	80 μ A/lm
[Cathode] Luminous Sensitivity Typ.	110 μ A/lm
[Cathode] Blue Sensitivity Index (CS 5-58) Typ.	12.0
[Cathode] Radiant Sensitivity Typ.	95 mA/W
[Anode] Luminous Sensitivity Min.	3 A/lm
[Anode] Luminous Sensitivity Typ.	30 A/lm
[Anode] Radiant Sensitivity Typ.	2.6 x 10 ⁴ A/W
[Anode] Gain Typ.	2.7 x 10 ⁵
[Anode] Dark Current (after 30min.) Typ.	2 nA
[Anode] Dark Current (after 30min.) Max.	20 nA
[Time Response] Rise Time Typ.	9.5 ns
[Time Response] Transit Time Typ.	52 ns

PMT accoppiato allo Scintillatore



PMT HV Driver

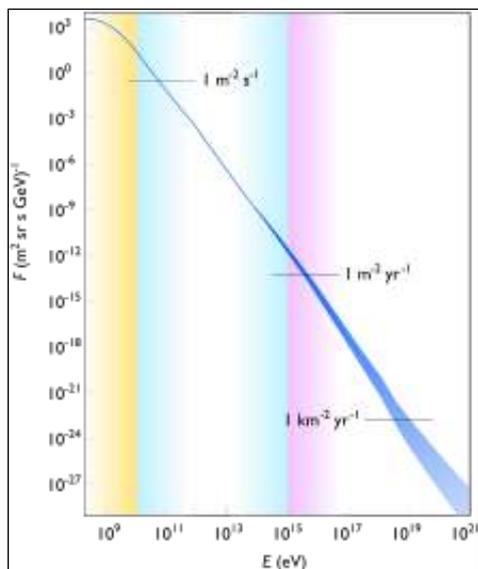


Il tubo fotomoltiplicatore viene alimentato mediante un PMT adapter Theremino collocato all'interno del contenitore metallico. In realtà viene utilizzata solo la parte di generazione della alta tensione. Il segnale viene prelevato dal condensatore C8, mentre tutta la parte di "pulse shaping" non è stata montata.

L'alimentazione del driver HV avviene attraverso una tensione di 5V che può essere facilmente fornita da una serie di 4 batterie stilo da 1,5V, la cui tensione può venire un po' ridotta ad esempio con un diodo collegato in serie.

Teoria dei Raggi cosmici

I raggi cosmici sono particelle energetiche provenienti dallo spazio esterno, alle quali è esposta la Terra e qualunque altro corpo celeste, nonché i satelliti e gli astronauti in orbita spaziale. La loro natura è molto varia (l'energia cinetica delle particelle dei raggi cosmici è distribuita su quattordici ordini di grandezza), così come varia è la loro origine: il Sole, le altre stelle, fenomeni energetici come novae e supernovae, fino ad oggetti remoti come i quasar.



Flusso dei raggi cosmici in funzione della loro energia

La parte su sfondo giallo è ritenuta essere di origine solare, la parte su sfondo azzurro di origine galattica, la parte di più alta energia di origine extragalattica.

In media una particella incide su ogni centimetro quadrato di superficie sulla Terra ogni secondo.

La maggior parte dei raggi cosmici che arrivano sulla Terra sono prodotti secondari di sciami formati nell'atmosfera dai raggi cosmici primari, con interazioni che tipicamente producono una cascata di particelle secondarie a partire da una singola particella energetica.

I raggi cosmici primari

Al di là dell'atmosfera i raggi cosmici sono costituiti da protoni (per circa il 90%), da nuclei di elio (quasi il 10%); tuttavia anche elettroni ed altri nuclei leggeri, fotoni, neutrini ed in minima parte antimateria (positroni ed antiprotoni) fanno parte dei raggi cosmici primari. Giunte nell'atmosfera terrestre, tali particelle interagiscono con i nuclei delle molecole dell'atmosfera formando così, in un processo a cascata, nuove particelle proiettate in avanti, che prendono il nome di raggi cosmici secondari.

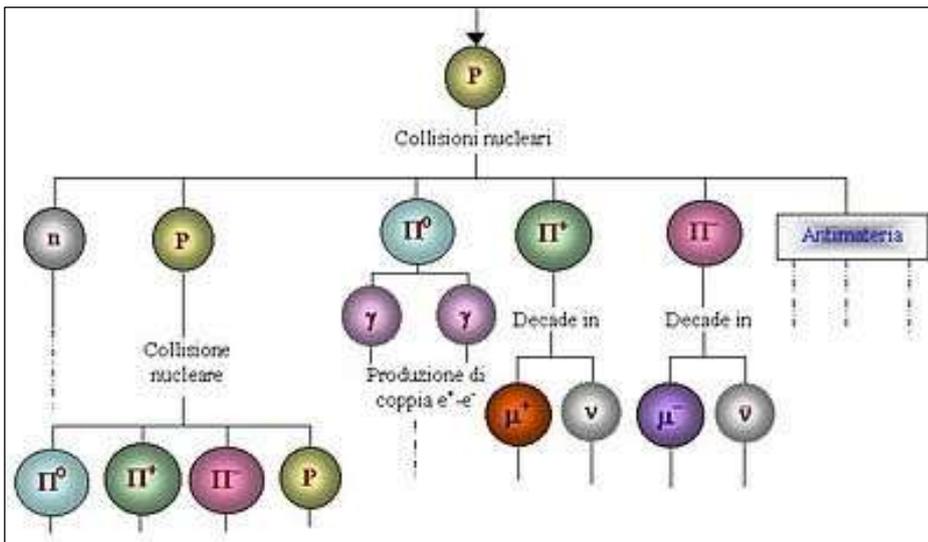
La composizione e lo spettro in energia sono stati dettagliatamente studiati per la radiazione cosmica primaria. Il flusso relativo all'idrogeno è poco più del 90%, un po' meno del 10% per l'elio, 7×10^{-4} per gli elementi leggeri come Litio, Berillio e Boro, e 5×10^{-3} per altri elementi dal Carbonio al Neon.

Lo spettro (numero di raggi incidenti per unità di energia, per unità di tempo, per unità di superficie per steradiante) dei raggi cosmici primari è ben descritto da una legge a potenza nella forma:

$$\phi \propto E^{-\alpha}$$

con $\alpha = 2.7$ per valori dell'energia inferiori a $\approx 10^{15} \text{ eV}$. Per valori superiori dell'energia si ha un irripidimento, con α che diviene pari a 3. Il punto in cui tale cambio di pendenza ha luogo viene denominato ginocchio. Per energie ancora più alte ($\approx 10^{18} \div 10^{19} \text{ eV}$) lo spettro dei raggi cosmici torna ad essere meno ripido, dando luogo ad un ulteriore cambio di pendenza che viene chiamato caviglia.

Caratteristiche dei raggi cosmici secondari



Schema di formazione della radiazione cosmica secondaria

La radiazione secondaria al livello del mare è costituita da due componenti (molle e dura) che hanno diverso comportamento nell'attraversamento di mezzi molto densi (ferro, piombo, ...).

La componente molle (circa il 30% della radiazione secondaria), composta da elettroni e fotoni ed in minima parte da protoni, kaoni e nuclei, è capace di attraversare solo pochi centimetri di assorbitore. La componente dura (circa il 70%), composta da **muoni**, riesce a penetrare spessori di materiali assorbenti di oltre un metro.

Il flusso medio delle particelle che compongono la radiazione, vale a dire il numero di particelle che nell'unità di tempo e nell'unità di superficie raggiungono il livello del mare, è stimato:

$$100 \times \frac{\text{particelle}}{m^2 s} \approx 0.01 \frac{\text{particelle}}{cm^2 s}$$

I raggi cosmici hanno una distribuzione angolare rispetto alla normale alla superficie della Terra descrivibile dalla funzione:

$$f(\theta) = \frac{4}{\pi} \cdot \cos^2 \theta, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

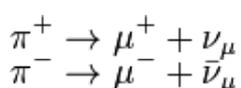
Le particelle che compongono la radiazione sono molto energetiche. Si stima che il flusso medio a livello del mare abbia un'energia media di 3-4 GeV. Il **leptone μ (muone)**, componente principale dei raggi cosmici secondari, è una particella elementare a spin 1/2, massa:

$$105,658389 \pm 0,000034 MeV/c^2$$

(circa duecento volte la massa dell'elettrone), e vita media :

$$\tau_{\mu} = 2,19703 \pm 0,00004 \mu s$$

Come detto in premessa, i μ sono prodotti nell'alta atmosfera principalmente dal decadimento di π carichi:



Alla produzione essi sono caratterizzati da **velocità relativistiche** e per via del fenomeno della **dilatazione temporale** riescono a giungere al livello del mare, dove si osserva che i μ^+ sono circa il 20% in più dei μ^- .

Il muone non interagisce con la materia mediante la “forza nucleare forte”, ma solo attraverso la “forza nucleare debole” e quella elettromagnetica. Il muone percorre una distanza relativamente lunga perdendo gradualmente la sua energia cinetica ed alla fine decade, in seguito alla interazione debole, in un elettrone, un neutrino ed un antineutrino. Con il nostro strumento rileveremo i decadimenti di alcuni dei muoni prodotti nella cascata cosmica.

Non tutte le particelle prodotte dalla cascata cosmica nell’alta atmosfera sopravvivono il tempo sufficiente per raggiungere la superficie al livello del mare, questo a causa sia della interazione con i nuclei dei gas atmosferici sia a causa del decadimento spontaneo. Il flusso muonico a livello del mare è approssimativamente di 1 per minuto per cm^2 con una energia cinetica media di circa **3-4 GeV**.

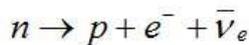
Accurati studi mostrano che l’altitudine media di produzione dei muoni rilevati al livello del mare è approssimativamente di 15 km. Viaggiando alla velocità della luce, il tempo di percorrenza del tragitto dal punto di produzione fino alla superficie terrestre vale quindi **50 μsec** . Dato che la vita media di un muone a riposo è minore almeno di un fattore 20, la presenza di un flusso muonico misurabile al livello del mare è una prova qualitativa dell’effetto di dilatazione temporale previsto dalla teoria della relatività speciale.

Decadimento del Muone

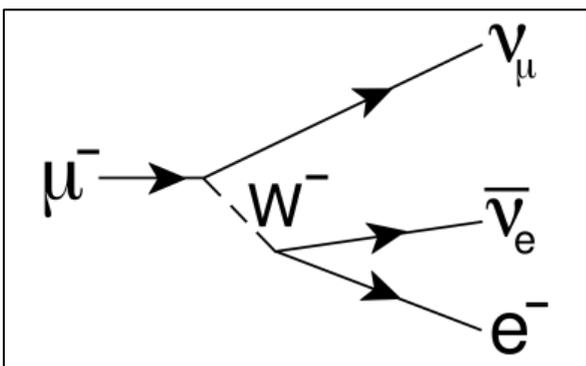
Il muone è stata la prima particella elementare ad essere trovata instabile, cioè soggetta al decadimento in altre particelle. Al tempo dei primi pionieristici esperimenti di Rossi sul decadimento del muone le sole altre particelle fondamentali note erano il fotone, l’elettrone, il positrone, i protoni, i neutroni ed il neutrino.

Da allora dozzine di particelle ed antiparticelle sono state scoperte e la maggior parte di esse è instabile.

In effetti di tutte le particelle che sono state osservate come entità isolate le uniche che vivono più a lungo dei muoni sono i fotoni, gli elettroni, i protoni, i neutroni, i neutrini e le loro antiparticelle. Anche il neutrone, quando è libero, è sottoposto al decadimento beta con una vita media di 15 minuti, nel seguente processo di decadimento.



Analogamente il muone decade attraverso il processo :



I tempi del decadimento del muone si descrivono matematicamente in maniera semplice. Supponiamo che all’istante t abbiamo $N(t)$ muoni. Se la probabilità che un muone decada in un piccolo intervallo temporale dt vale λdt , dove λ è la **costante di decadimento** che caratterizza la rapidità di decadimento del muone, allora la variazione dN nella nostra popolazione di muoni vale $dN = -N(t)\lambda dt$, e quindi $dN/N(t) = -\lambda dt$.

Integrando abbiamo :

$$N(t) = N_0 e^{(-\lambda t)}$$

$N(t)$ è il numero di muoni ancora esistenti all'istante di tempo t

N_0 è il numero di muoni all'istante $t = 0$

La "vita media" τ del muone è il reciproco di λ , $\tau = 1/\lambda$

Questa semplice relazione esponenziale è tipica del decadimento radioattivo.

Ora, non abbiamo un gruppo di muoni del quale misurare la velocità di decadimento. Invece rileviamo il decadimento muonico a partire dai muoni che entrano nel rivelatore essenzialmente ad istanti casuali, tipicamente uno per volta. Anche in questo caso la distribuzione del tempo di decadimento ha una semplice andamento esponenziale del tipo su descritto. Come distribuzione del tempo di decadimento **$D(t)$** , intendiamo che la probabilità tempo-dipendente che un muone decada nell'intervallo temporale da t a $t + dt$ è dato da **$D(t)dt$** . Partendo con **N_0** muoni, allora la frazione $-dN/N_0$ che dovrebbe decadere mediamente nell'intervallo temporale compreso tra t e $t + dt$ viene ottenuta differenziando la relazione descritta prima:

$$-dN = N_0 \lambda \exp(-\lambda t) dt$$

$$-dN/N_0 = \lambda \exp(-\lambda t) dt$$

Il lato sinistro della ultima equazione è proprio la probabilità di decadimento che stiamo cercando, quindi **$D(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$** . Questo è vero indipendentemente dal valore di partenza di N_0 . Vale a dire, la distribuzione dei tempi di decadimento, per i nuovi muoni che entrano nel nostro rivelatore, è sempre esponenziale con lo stesso esponente usato per descrivere il decadimento di una popolazione di muoni.

Ancora, la vita media del muone vale $\tau = 1/\lambda$.

Dato che il tempo di decadimento dei muoni è distribuito esponenzialmente non è importante che il muone del quale registriamo il decadimento sia stato prodotto nel rivelatore piuttosto che nell'alta atmosfera. Una funzione esponenziale appare sempre la stessa sia che venga esaminata nei primi o negli ultimi istanti, la sua "forma esponenziale" non cambia nel tempo.

Misure di Flusso

Il flusso di particelle che raggiungono il rivelatore (al livello del mare) dovrebbe avere il seguente valore :

Area del rivelatore = 119cm^2

$119\text{cm}^2 \times 0,01 \text{ particelle/s cm}^2 = 1,19 \text{ particelle/s} = 71\text{cpm teorici}$

In realtà il valore misurato è superiore perché lo scintillatore plastico viene raggiunto da particelle cosmiche anche attraverso i fianchi. Inoltre le misurazioni sono state fatte a quote superiori al livello del mare.

Nella tabella e nel grafico seguente sono illustrati i risultati ottenuti :

Altitude (m)	CPM
195	217
375	225,1
810	273,95
1070	286,22
1565	349,17

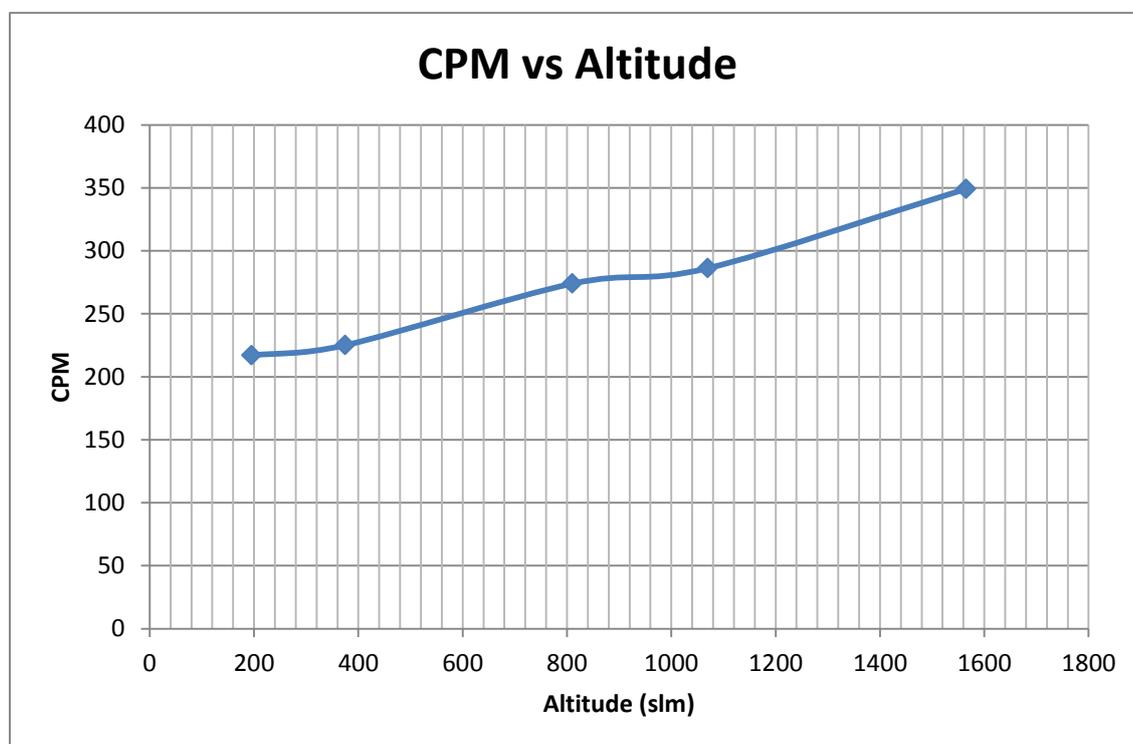
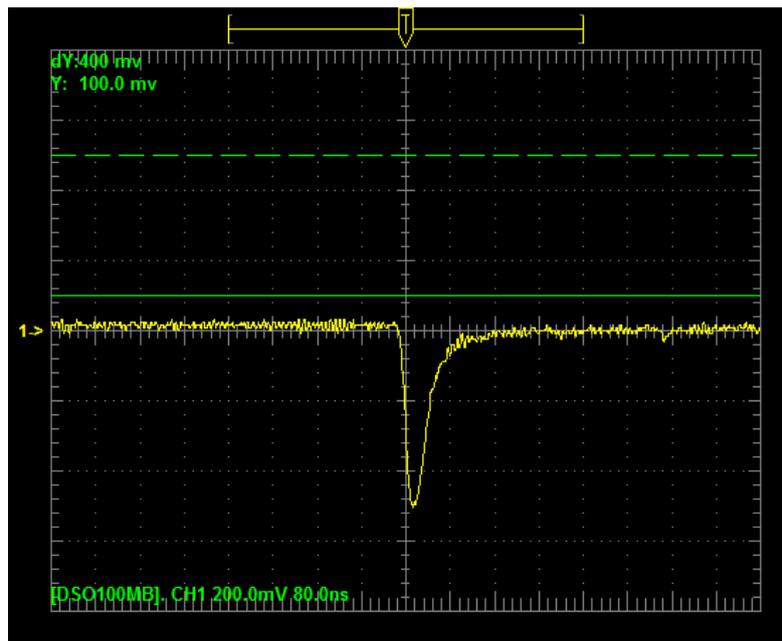


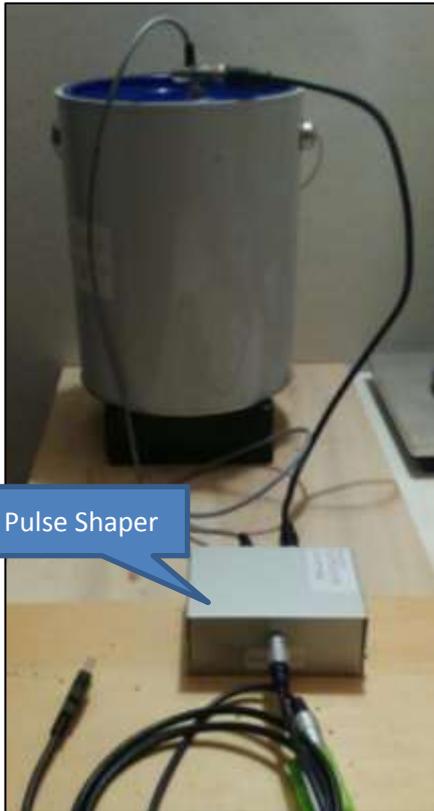
Grafico che illustra l'andamento del flusso muonico a diverse altitudini. E' evidente l'aumento del valore al crescere dell'altitudine alla quale viene fatta la misurazione. Al crescere della quota aumenta il flusso perché diminuisce lo spessore di atmosfera attraversato e quindi si riduce la probabilità di assorbimento e di decadimento spontaneo dei muoni.

Il tipico muone di alta energia attraversa lo scintillatore da parte a parte, in questo modo provoca un certo quantitativo di ionizzazione e deposita nello scintillatore circa 50 MeV della sua energia. Una frazione di questa energia viene convertita in fotoni luminosi e una frazione di questa luce raggiunge il tubo fotomoltiplicatore che converte il breve lampo di luce in un impulso di corrente rilevabile. Gli eventi molto più frequenti dovuti alle radiazioni beta e gamma della radiazione di fondo, hanno una energia di 1 MeV o meno e quindi possono essere facilmente filtrati da un discriminatore.

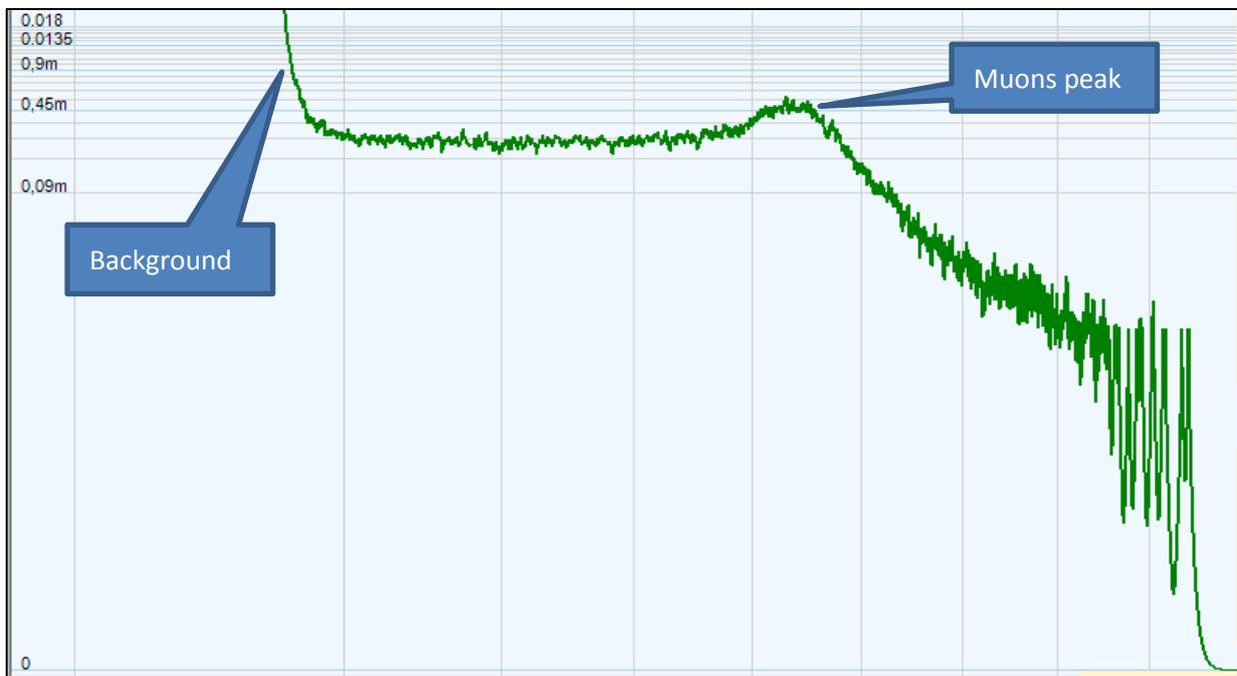
Regolando la tensione di alimentazione del fotomoltiplicatore a 1000V, il tipico impulso prodotto da un muone che passa nel cristallo scintillatore ha una ampiezza di circa 200-400mv; regolando la soglia di trigger dell'oscilloscopio a 200mv si selezionano automaticamente solo gli impulsi prodotto dai muoni.



Tipico impulso provocato dal passaggio di un muone. La larghezza FWHM dell'impulso è di circa 40ns, in linea con le caratteristiche dello scintillatore plastico e del fotomoltiplicatore



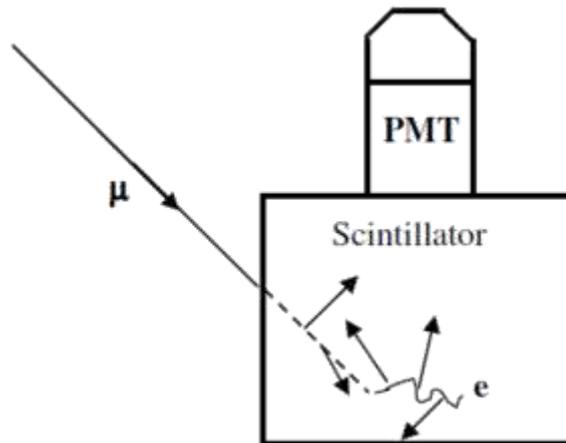
Gli impulsi prodotti dal rivelatore a scintillazione possono essere convenientemente visualizzati da un software MCA. Per fare questo si collega l'uscita BNC del detector con il "pulse shaper" del PMT adapter Theremino, l'uscita audio di questo viene collegata ad un PC sul quale gira il software Theremino MCA. Lo spettro gamma che si ottiene evidenzia un picco ad energie elevate (decine di MeV), superiore ai picchi delle normali energie gamma. Questo picco corrisponde alla energia depositata dai muoni che interagiscono con lo scintillatore plastico. Per un muone con percorso verticale la massima energia depositata vale circa **50 MeV**. Naturalmente il picco che si ottiene non corrisponde alla energia dei muoni, dato che muoni con energia superiore attraversano il cristallo scintillatore e proseguono nella loro traiettoria, mentre muoni con energia inferiore vengono fermati all'interno del cristallo e subiscono il conseguente decadimento.



Spettro ottenuto con un software MCA nel quale si evidenzia il picco ad alte energie dovuto all'assorbimento dei muoni all'interno del cristallo plastico scintillatore. Il valore del picco di energia è stimato in circa 40-50 MeV

Misura del Decadimento del Muone

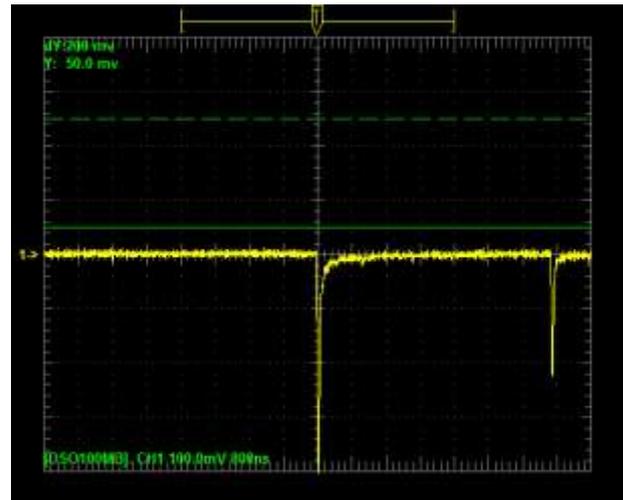
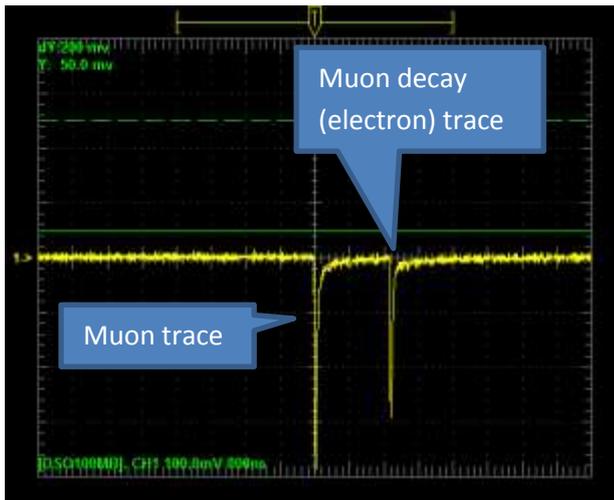
L'insieme scintillatore / PMT, opportunamente configurato, produce molti segnali elettrici ogni secondo, quasi tutti dovuti ai muoni che attraversano da parte a parte il cristallo scintillatore. Ma la frazione veramente interessante di questi eventi è quella dovuta a quei muoni che entrano nello scintillatore con energia cinetica molto minore del valore medio, questo perché questi muoni perdono energia, cedendola allo scintillatore, in quantità sufficiente a far sì che vengano arrestati all'interno del cristallo stesso. Arrestandosi, depositano nel cristallo l'ultima parte della loro energia cinetica, tipicamente dell'ordine di 50 MeV, producendo quindi un impulso luminoso in questo processo di rallentamento.



Schema che mostra la generazione di due impulsi luminosi (frecce) usati nella determinazione della vita media muonica. Un impulso di luce proviene dal muone rallentato (linea punteggiata) mentre l'altro proviene dal suo decadimento in un elettrone o positrone (linea ondulata)

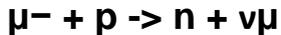
I muoni che si arrestano vivono ancora un tempo relativamente lungo, dell'ordine di microsecondi, all'interno dello scintillatore; alla fine però ciascuno di essi decade in un elettrone (positrone) più un neutrino e un antineutrino. Praticamente tutta l'energia a riposo (105 MeV) del muone arrestato appare come energia cinetica delle tre particelle; mediamente, l'elettrone (positrone) riceve un terzo di questa energia, circa 35 MeV (i due neutrini portano via l'energia restante in maniera non rilevabile). Ma questo elettrone, essendo una particella carica, causa lei stessa ionizzazione durante il suo movimento all'interno dello scintillatore. Convenientemente, la energia tipica depositata in questo processo di ionizzazione è approssimativamente di un valore vicino a quella depositata da un muone in transito, o da un muone in fase di arresto, così questa configurazione del PMT/scintillatore è adatta anche per la rilevazione del decadimento dei muoni che si sono arrestati all'interno del detector.

Al fine di misurare la vita media del muone siamo interessati solo in quei muoni che entrano, rallentano, si arrestano e decadono all'interno dello scintillatore plastico. Questi muoni, nel momento in cui entrano nel detector hanno una energia totale di circa 160 MeV. Quando il muone viene rallentato fino ad arrestarsi, lo scintillatore eccitato emette un impulso luminoso che viene captato dal tubo fotomoltiplicatore (PMT), alla fine della catena elettronica viene prodotto un impulso logico. Un muone arrestato, dopo un istante, decade in un elettrone, un neutrino e un anti-neutrino. Dato che la massa dell'elettrone è molto minore di quella del muone, $m_{\mu}/m_e \sim 210$, l'elettrone risulta avere energia molto elevata producendo nello scintillatore impulsi luminosi lungo tutta la sua traiettoria. Anche il neutrino e l'anti-neutrino si dividono una parte dell'energia totale del muone ma non sono rilevabili. Anche questo secondo impulso di luce viene catturato dal PMT e viene utilizzato per misurare l'intervallo temporale tra i due impulsi. La distribuzione degli intervalli temporali tra due successivi impulsi per un insieme di decadimenti muonici è la grandezza fisica che ci interessa per la misura del tempo di decadimento del muone.



Esempi di impulsi provocati dal passaggio di un muone e dal successivo suo decadimento in un elettrone. L'elettrone ha elevata energia cinetica e quindi lascia una traccia di ampiezza simile a quella del muone. Nel primo caso l'intervallo temporale è di circa 1600ns, nel secondo caso di circa 5600ns.

I muoni dei quali vogliamo misurare il tempo di vita devono necessariamente interagire con la materia. I muoni negativi che si arrestano nello scintillatore possono legarsi ai nuclei di carbonio ed idrogeno presenti nello scintillatore nella stessa maniera dell'elettrone. Dato che il muone non è un elettrone, il principio di esclusione di Pauli non impedisce che il muone occupi un orbitale atomico già riempito da elettroni. Questi muoni negativi legati possono quindi interagire con i protoni secondo la seguente reazione :



prima che essi decadano spontaneamente.

Dato che ci sono ora due modi diversi di decadimento per il muone negativo, la vita media effettiva del muone negativo è leggermente inferiore della vita media del muone carico positivamente, il quale non ha questo secondo meccanismo di interazione. La vita media che misuriamo con il nostro strumento sarà quindi un valore mediato su entrambe le due tipologie di muoni: quello positivo e quello negativo, per cui il valore che otterremo dovrebbe risultare leggermente inferiore al valore misurato nello spazio libero.

$$\tau_\mu = 2,19703 \pm 0,00004 \mu\text{sec}$$

Per l'acquisizione dei dati sul decadimento del muone abbiamo utilizzato un oscilloscopio sul quale viene impostato ad "infinito" il tempo di persistenza : in questo modo gli impulsi dovuti agli elettroni del decadimento dei muoni rimangono visualizzati e possono essere misurati.

Nel dettaglio il setting del trigger va impostato a **200mV** in modalità "**peak detect**" in modo da acquisire anche impulsi molto brevi, la base dei tempi va impostata a **400ns** oppure a **800ns**, e la traccia va traslata a sinistra dello schermo in modo da avere tutta la parte destra ampia circa **10μsec**.

La misurazione dei tempi va fatta utilizzando i cursori di misurazione normalmente disponibili sull'oscilloscopio.

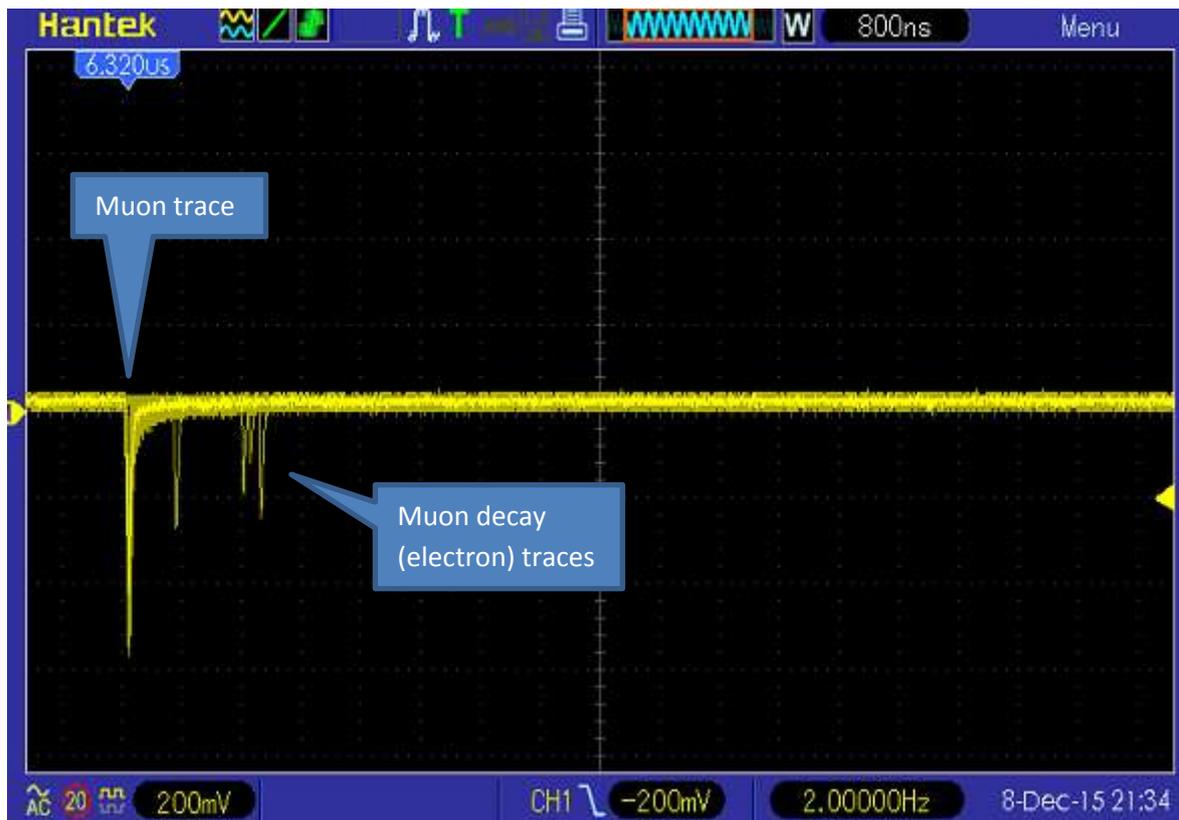
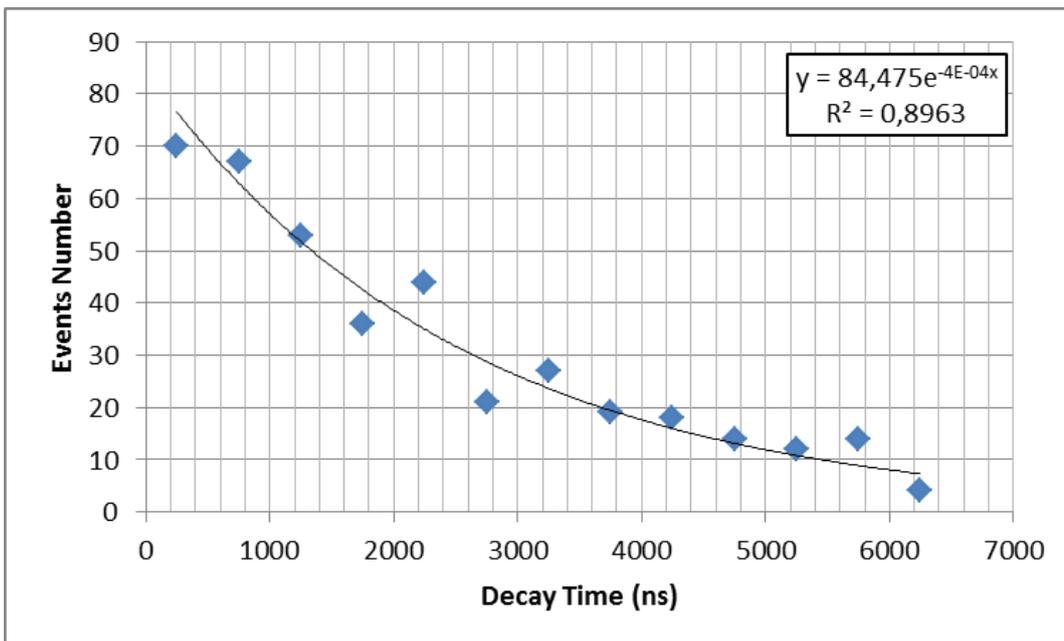
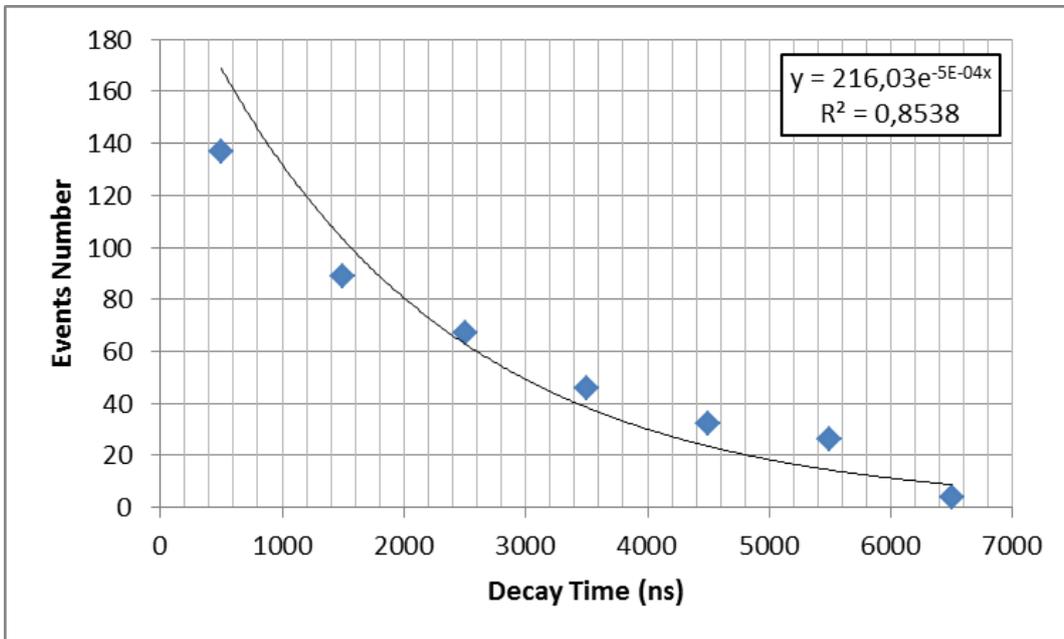


Immagine dell'oscilloscopio che mostra, con il settaggio del display a persistenza infinita, la traccia dei muoni sulla sinistra e sulla destra alcune tracce dell'elettrone prodotto dal decadimento

Con il detector ed il metodo descritto sopra abbiamo acquisito **400 eventi**.

Suddividendoli in bin di ampiezza 1 μsec si ottiene il primo grafico visualizzato sotto, dal quale si ottiene con fitting esponenziale un valore $\tau_\mu = 2 \mu\text{sec}$.

Suddividendo i dati in bin di ampiezza 0,5 μsec si ottiene invece un valore $\tau_\mu = 2,5 \mu\text{sec}$.



Metodo di Stima	τ_μ
Fitting esponenziale con bin 1 μsec	2 μsec
Fitting esponenziale con bin 0,5 μsec	2,5 μsec

Usando il metodo statistico MLE (maximum Likelihood Estimation) per la stima della costante esponenziale Si dimostra che :

$$\tau = \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n}$$

In pratica il valore più probabile della costante di tempo del decadimento esponenziale è pari alla media aritmetica delle misurazioni.

La varianza associata alla stima si ottiene con la seguente formula :

$$\sigma = \tau^2/n$$

Per $n = 400$ (sono stati acquisiti 400 eventi) si ottengono i valori :

$\tau_\mu = 2,078$ (media delle misurazioni)

$\sigma = 0,011$

Il valore che si ottiene è probabilmente leggermente sottostimato dato che la finestra temporale presa in esame andava fino a 7 μsec . Questo valore è comunque in accordo con il risultato che si dovrebbe ottenere che si colloca tra il valore teorico di **2,2 μsec per i muoni positivi** che coincide con il valore che si misura nello spazio vuoto ed il valore di **2,04 μsec per i muoni negativi** che risentono anche della interazioni con i nuclei del materiale dello scintillatore.

Metodo di Stima	τ_μ
Stima statistica MLE	2,078 \pm 0,011 μsec